

DS de mathématiques n°1 (durée : 1h30)

Le cheminement de votre pensée doit être apparent (autrement dit : il faut justifier ses réponses;). Le barème est donné à titre indicatif, et des points seront attribués pour la présentation et la rédaction de la copie; En particulier, mettez vos résultats en valeur, par exemple en les soulignant d'une autre couleur ou en les encadrant.

Les calculatrices et documents de tout type sont interdits.

Exercice 1 (2 pts). Dans le plan complexe, placer les points A , B , C et D d'affixes respectives $z_A = 3e^{\frac{2i\pi}{3}}$, $z_B = -2 - 2i\sqrt{3}$, $z_C = -3e^{i\frac{\pi}{4}}$ et $z_D = \overline{z_B}$. Justifier très brièvement.

Exercice 2 (1,5 pts). Résoudre l'équation

$$(3 - 4i)z + 1 - 3i = 2iz.$$

On exprimera le résultat sous forme algébrique.

Exercice 3 (4 pts).

- Déterminer les racines carrées de $-3 - 4i$.
- Résoudre alors dans $\mathbb{C}$ l'équation $iz^2 + (4i - 3)z + i - 5 = 0$.

Exercice 4 (1,5 pts). Sans calculs (mais en justifiant), déterminer si les nombres suivants sont réels ou imaginaires purs :

$$\begin{aligned} z_1 &= \frac{(1-i)(5+3i)}{(1+7i)(2+4i)} + \frac{(1+i)(5-3i)}{(1-7i)(2-4i)} \\ z_2 &= \frac{(1-i)(5+3i)}{(1+7i)(2+4i)} - \frac{(1+i)(5-3i)}{(1-7i)(2-4i)} \\ z_3 &= \frac{(1-i)(5+3i)}{(1+7i)(2+4i)} \times \frac{(1+i)(5-3i)}{(1-7i)(2-4i)} \end{aligned}$$

Exercice 5 (7 pts). Soient $z_1 = -1 + i\sqrt{3}$, $z_2 = -1 + i$ et $z_3 = \frac{z_1}{z_2}$ des nombres complexes.

- Ecrire z_3 sous forme algébrique.
- Ecrire z_1 , z_2 et z_3 sous forme trigonométrique, puis exponentielle.
- Déduire des questions précédentes les valeurs exactes de $\cos(-\frac{\pi}{12})$ et $\sin(-\frac{\pi}{12})$.
- Proposer une autre manière de déterminer les valeurs de $\cos(-\frac{\pi}{12})$ et $\sin(-\frac{\pi}{12})$.
- Déterminer la forme algébrique de z_3^{1800} .

Exercice 6 (3 pts).

- Rappeler les formules d'Euler.
- Linéariser $\cos^4(x)$.

Exercice 7 (3 pts. Transformation de Cayley).

- Soient $\theta, \theta' \in \mathbb{R}$. Factoriser les nombres $z_1 = e^{i\theta} + e^{i\theta'}$ et $z_2 = 1 + e^{i\theta}e^{i\theta'}$ par $e^{i\frac{\theta+\theta'}{2}}$.
- Soient z et z' deux nombres complexes de module 1. Démontrer que le nombre $\frac{z + z'}{1 + zz'}$ est un nombre réel, et préciser son module.